

Orthogonal elementary interactions for bimatrix games

(Ortogonalis elemi kölcsönhatások bimátrix játékokban)

Szabó György and Király Balázs

Physica A 677 (2025) 130920

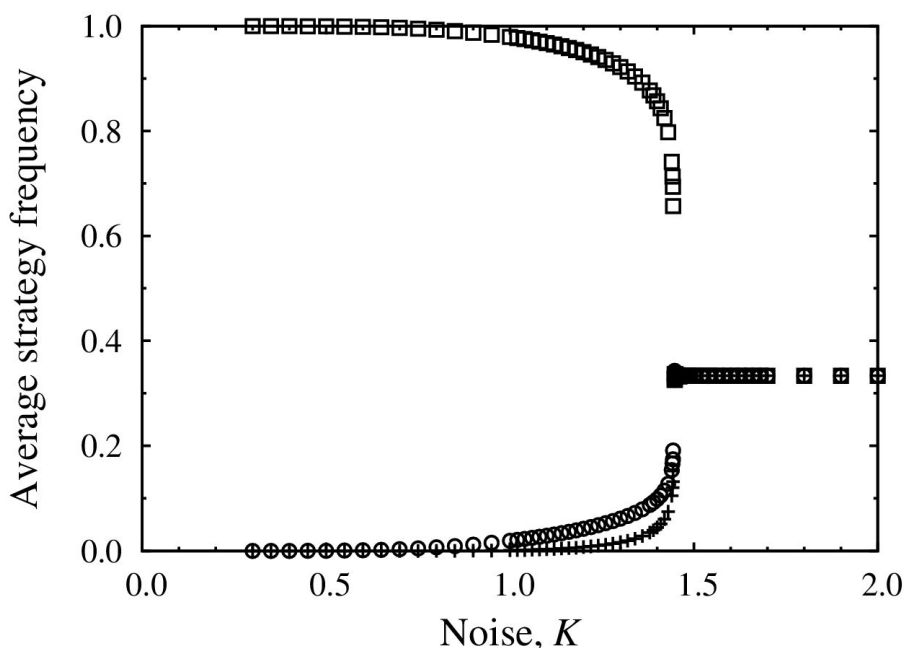
Az evolúciós játékokban egy nyereménymátrix definiálja a két ekvivalens játékos közötti kölcsönhatást, ha mindketten az n számú opció (stratégia) valamelyikét választják. Még pontosabban, a nyereménymátrix elemei számszerűsítik a jövedelmeket az összes lehetséges stratégiapárra. A vektorokhoz hasonlóan azonban a mátrixok is felépíthetők ortogonális bázismátrixok lineáris kombinációjaként. A Descartes típusú bázismátrixok esetén (amelyek egyetlen 1-es tartalmazznak, amíg az összes többi mátrixelem 0) az együtthatók meghatározzák az első játékos jövedelmét az összes stratégiapárnál (amelyeket a mátrixban lévő 1-es helye azonosít). Ezen bázismátrixok helyett azonban használhatunk más bázismátrix készletet is, amely lehetővé teszi számunkra a négyféle ortogonális kölcsönhatás azonosítását a csupa 1-es tartalmazó mátrix mellett, amely egy irreleváns tagnak tekinthető. Erre egy példa az, hogy az önfüggő-nyereményű játékok mátrixában azonos elemek vannak a sorokban. A társfüggő-nyereményű játékoknál a mátrixok oszlopaiban találhatók azonos értékek. Ezeknek a komponenseknek egy általános játékból való eltávolítása után a maradék nyereménymátrix (amelyben az elemek összege 0 minden sorban és oszlopban) felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére. A szimmetrikus rész a koordinációs típusú kölcsönhatásokat összegzi, amelyek az azonos (versus eltérő) stratégiaválasztások preferenciáját mérik minden stratégiapár esetében. Ehhez hasonlóan az antiszimmetrikus rész a kő-papír-olló típusú játékok megfelelő részhalmazából építhető fel.

A négyféle ortogonális elemi kölcsönhatás különböző kombinációi eredményezik a sokszereplős evolúciós játékok makroszkópikus viselkedésében megfigyelt gazdagságot. Nincsen valódi kölcsönhatás a játékosok között, ha a játékot az ön- és társfüggő nyereményű játékok szimmetrikus kombinációja határozza meg. Ilyen kölcsönhatások esetében az optimális stratégiaválasztást külső kényszerek diktálják az önző játékosok számára. Ugyanakkor, az ilyen játékok antiszimmetrikus összetevője olyan konfliktus (társadalmi dilemma) okozója, ahol az egyéni- és csoportérdek különbözik. A kő-papír-olló típusú komponensek jelenléte megakadályozza a potenciál létezését és a termodinamikai viselkedés lehetőségét megfelelő dinamikai szabályok esetén. Ezen utóbbi komponensek jelenléte okozza az ökológiai és társadalmi rendszerekre jellemző makroszkópikus viselkedések széles skáláját.

Ebben a munkában a szerzők kiterjesztik az ortogonális elemi kölcsönhatások osztályozását bimátrix játékokra, amelyekben két különböző játékos választ az n számú lehetőség közül. A különbözőség következménye, hogy azonos (sorszámú) stratégia választása esetén nyereményük lehet különböző, és stratégiacsere esetén a játékosok nem cserélnék nyereményt. Ezekben a játékelméleti kölcsönhatásokban a nyeremény-paraméterek száma (dimenziója) megduplázódik. A fent említett mátrixfelbontás koncepciójának alkalmazása megmutatta az irreleváns, illetve az ön- és társfüggő nyereményű komponensek létezését a játékosok számára független paraméterekkel. A bimátrix maradék része felbontható egy antiszimmetrikus (nulla-összegű játékok) és szimmetrikus (testvéri, ill. partnerségi játékok) járulékaik összegére. Kiderült, hogy a nulla-összegű komponens a kétstratégias érmepárosítás játékok egy részhalmazából építhető fel. Ezekben az elemi komponensekben a játékosok csak két lehetőségüket használhatják, amely megfelel a "fej" (H) vagy "írás" (T) választásának. Ezen

elemi kölcsönhatások jelenléte megakadályozza a potenciál létezését és ezzel együtt a termodinamikai viselkedések lehetőségét, mert támogatja a ciklikus egyoldalú stratégiaváltozásokat, pl. HH-ból HT-be, majd TT-be, majd TH-ba, majd HH-ba, stb.), amelyek fenntartják az élő rendszerekre jellemző folyamatokat.

Az azonos nyereményű kölcsönhatások halmazában felszínre került az úgynevezett "irányított antikoordinációs komponensek" létezése, amely számszerűsíti a játékosok eltérő képességeit $n > 2$ esetén, és egyesíti a koordinációs, illetve a kő-papír-olló típusú játékokra jellemző tulajdonságokat. Pontosabban, ez a háromstratégiás (A,B, és C) elemi kölcsönhatás azt sugallja a játékosoknak, hogy AB, BC, vagy CA stratégiapárt válasszanak, mert stratégiacserénél mindketten vesztesek lesznek, azonos stratégia választásánál (pl. AA, BB, vagy CC) pedig semmit sem kapnak. Monte Carlo szimulációk segítségével lehetőség nyílt egy négyzetlánc (pontosabban egy nagy sakktáblán) elhelyezett játékosok viselkedésének feltárására, ha ilyen háromstratégiás játék írja le a szomszédok közötti kölcsönhatást. A modell numerikus elemzései azt mutatták, hogy ez a rendszer egy folytonos rendezett-rendezetlen fázisátalakuláson megy keresztül, amikor növeljük az evolúciós dinamika zajszintjét. A releváns különbségek ellenére ez az átmenet reprodukálja a háromállapotú Potts modellben megfigyelt robusztus tulajdonságokat, ahol alacsony zajszintnél az egyik állapot (pl. A) van jelentős többségben és alkot egy rendezett állapotot miközben a másik két állapot gyakorisága megegyezik.



A háromstratégiás irányított antikoordinációs evolúciós játékban a "sakktáblán" elhelyezkedő kétféle játékos stratégiáinak gyakorisága három értékkel jellemezhető a rendezett állapotban. A rend-rendezetlen állapotváltozás közelében azonban a gyakoriságok hatványfüggvény jellegű viselkedése és a fluktuációk divergálása azonos azzal, amit a Potts modell univerzális viselkedése képvisel.

A jelenlegi eredmények fényében az ortogonális elemi kölcsönhatások koncepciója felhasználható a különböző komponensek közötti kölcsönhatás eredményeként kialakuló komplex jelenségek és összefüggések szisztematikus feltárására.

Hivatkozási forrás:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437125005722>